Некоторые обратные задачи для уравнений с памятью гиперболического типа

Жанна Дмитриевна Тотиева

Южный математический институт Владикавказского научного центра РАН

Северо-Кавказский центр математических исследований ВНЦ РАН

24 ноября, 2023

Воркшоп по математическому моделированию и дифференциальным уравнениям, посвященный юбилею д.ф.-м.н., профессора А.О. Ватульяна

1. Двумерная обратная задача определения ядра для уравнения термоупругости с памятью

$x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \;\; x_3 > 0, \;\; t \in \mathbb{R}$

$$\rho(x_3)\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}, \qquad u_i \mid_{t<0} \equiv 0, \qquad i = 1, 2, 3,$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = k\Delta H, \qquad H \mid_{t<0} \equiv 0,$$

$$T_{3j}|_{x_3=+0} = -\delta_{3j}\delta'(t), \;\; j = 1, 2, 3,$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial x_3} - \gamma H\right) |_{x_3=+0} = -\gamma(\tilde{T}_1 - \tilde{T}_0)\theta_1(t),$$

$H(x, t)$ – приращение температуры, k – постоянный коэффициент температуропроводности, $\tilde{T}_1$, $\tilde{T}_0$, γ — постоянные, $\tilde{T}_1 > \tilde{T}_0$, $\gamma > 0$, $\theta_1(t) = t\theta(t)$,

$$T_{ij}(x, t) = \sigma_{ij}[u](x, t) + \int_0^t h(x_2, t - \tau)\sigma_{ij}[u](x, \tau)d\tau,$$

$$\sigma_{ij}[u](x, t) = \mu(x_3)\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \delta_{ij}\left[\lambda(x_3)divu - (3\lambda(x_3) + 2\mu(x_3))\int_0^{H(x,t)} \alpha(z)dz\right].$$

1. Двумерная обратная задача определения ядра для уравнения термоупругости с памятью

Для $(x,z,t), x \in \mathbb{R}, \ z > 0, \ t \in \mathbb{R}$:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} L\left[h(x,t), \mu \frac{\partial u}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial z} L\left[(\lambda + 2\mu)\frac{\partial u}{\partial z} - (3\lambda + 2\mu)\int_0^{H(x,z,t)} \alpha(s)ds\right], \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = k\Delta H, \tag{1.2}$$

$$u\mid_{t<0} \equiv 0, \quad H\mid_{t<0} \equiv 0, \tag{1.3}$$

$$L\left[h(x,t), \frac{\partial u}{\partial z}\right]_{z=+0} = -\frac{\delta(t)}{\lambda(0) + 2\mu(0)} + \frac{3\lambda(0) + 2\mu(0)}{\lambda(0) + 2\mu(0)} L\left[h(x,t), R(H(x,0,t))\right], \tag{1.4}$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial z} - \gamma H\right)\mid_{z=+0} = -\gamma(\tilde{T}_1 - \tilde{T}_0)t\theta(t), \tag{1.5}$$

$\tilde{T}_1, \ \tilde{T}_0, \ \gamma$ – некоторые постоянные, $\tilde{T}_1 > \tilde{T}_0, \gamma > 0$; $R(s) = \int_0^s \alpha(\tau)d\tau$,

$$L\left[h(x,t), u(x,z,t)\right] = u(x,z,t) + \int_0^t h(x,t-\tau)u(x,z,\tau)d\tau.$$

$\rho = \rho(z),\ \mu = \mu(z),\ \lambda = \lambda(z)$ принадлежат классу Λ :

$$\Lambda = \{\rho(x_3),\ \mu(x_3),\ \lambda(x_3) \in C^2(\mathbb{R}_+),\ \rho(x_3) > 0, \mu(x_3) > 0, \lambda(x_3) > 0,$$
$$\lambda'(+0) = \mu'(+0) = \rho'(+0) = 0, \quad \mathbb{R}_+ = [0, \infty).\}$$

Задачу (1.2), (1.3), (1.5) можно рассмотреть как самостоятельную начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности. Она имеет следующее решение [Коваленко А. Д. Термоупругость, 1975]:

$$H(z,t) = \theta(t)(\tilde{T}_1 - \tilde{T}_0)\times$$
$$\times \int_0^t \left[erfc\left(\frac{z}{2\sqrt{k\tau}}\right) - \exp(\gamma z + \gamma^2 k\tau) erfc\left(\frac{z}{2\sqrt{k\tau}} + \gamma\sqrt{k\tau}\right)\right] d\tau,$$

$$erfc(z) = 1 - erf(z),\ erf(z) = (2/\sqrt{\pi})\int_0^z \exp(-\xi^2)d\xi.$$

Задачи определения ядер интегральных операторов в интегро-дифференциальных уравнениях гиперболического и параболического типа – направление в теории обратных задач, возникшее в конце прошлого столетия, и связано оно с именами Graselli M., Lorenzi A., Sinestrari E., Janno J., Von Wolfersdorf L., Paparoni E., Бухгейма А.Л., Дурдиева Д.К., Дятлова Г.Н., Кабанихина С.И., Яхно В.Г.

В дальнейшем развитие этого направления для гиперболических дифферецнальных операторов отражены в работах, например, Романова В.Г., Карчевского А.Л., Yamamoto M. которые рассмотрели физические постановки задач определения ядер для вязкоупругих сред с сосредоточенными источниками возмущения волн на границе.

Обратные коэффициентные задачи связанной термоупругости для неоднородных тел рассматрены в работах Ватульяна А.О., Мазья В., Козлова В., Нестерова С.А., Яхно В.Г., Фомина А.В. и других авторов. Задачи определения источников возмущений и граничных условий для термоупругой модели среды занимались, например, Bin Wu, Jijun Liu, K. Van Bockstal, M. Slodika, Shivcharan Thakare, N. W. Khobragade и др.

Предполагаем, что ядро $h(x,t)$ интегрального оператора L можно представить в виде:

$$h(x,t) = h_0(t) + h_1(x,t),$$

где функция $h_0(t)$ является заданной из класса $C^2[0,T]$ для фиксированного $T > 0$, а $h_1(x,t)$ – неизвестная, малая по абсолютной величине, добавка.

Формально введем параметр ε:

$$h(x,t) = h_0(t) + \varepsilon h_1(x,t), \tag{1.6}$$

Решение прямой задачи (1.1)–(1.5) будем искать в виде ряда по степеням ε

$$u(x,z,t) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j u_j(x,z,t), \tag{1.7}$$

Решение прямой задачи будем определять с точностью до порядка $O(\varepsilon^2)$. Тогда, подставляя (1.6), (1.7) в (1.1) и приравнивая члены, стоящие при ε^j, $j = 0, 1$, получаем две задачи:

1. Задача определения функций $u_0(x, z, t)$ из равенств

$$\rho \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = L\left[h_0(t), \mu \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial z}\left((\lambda + 2\mu)\frac{\partial u_0}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left[(3\lambda + 2\mu)R(H(z,t))\right]\right], \tag{1.8}$$

$$u_0 \mid_{t<0} \equiv 0, \tag{1.9}$$

$$L\left[h_0(t), \frac{\partial u_0}{\partial z}\right]_{z=+0} = -\frac{\delta(t)}{\lambda(0) + 2\mu(0)} + \frac{3\lambda(0) + 2\mu(0)}{\lambda(0) + 2\mu(0)} L\left[h_0(t), R(H(0,t))\right]. \tag{1.10}$$

2. Задача определения $u_1(x,z,t)$, $h_1(x,t)$ из равенств

$$\rho\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = L\left[h_0(t), \mu\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial z}\left((\lambda+2\mu)\frac{\partial u_1}{\partial z}\right)\right]$$

$$+\int_0^t h_1(x,t-\tau)\left[\mu\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial z}\left((\lambda+2\mu)\frac{\partial u_0}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left[(3\lambda+2\mu)R(H(z,t))\right]\right]d\tau, \tag{1.11}$$

$$u_1\,\big|_{t<0}\equiv 0, \tag{1.12}$$

$$L\left[h_0(t), \frac{\partial u_1}{\partial z}\right]\Bigg|_{z=+0} = -\int_0^t h_1(x,t-\tau)\frac{\partial u_0}{\partial z}d\tau$$

$$-\frac{3\lambda(0)+2\mu(0)}{\lambda(0)+2\mu(0)}\int_0^t h_1(x,t-\tau)R(H(0,\tau))d\tau. \tag{1.13}$$

Обратная задача: найти пару функций $u_1(x,z,t), h_1(x,t)$, $t>0$, входящее в (1.11)-(1.13), если известна следующая дополниительная информация о решении прямой задачи (1.12)–(1.14):

$$u(x,z,t)|_{z=+0} = g(x,t),\ \ t>0, x \in \mathbb{R} \tag{1.15}$$

$g(x,t)$ – заданная функция.

Определение. Функция $h_1(x,t)$ из класса $h_1(x,t) \in C_t^1([0,\infty); L_2(\mathbb{R}))$ называется решением обратной задачи (1.1)–(1.6), (1.15) если соответствующее ей решение прямой задачи (1.1)–(1.6) $u(x,z,t)$ из класса обобщенных функций $D'(\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R})$ удовлетворяет (1.15) для $g(x,t)$, принадлежащих классу обобщенных функций $D'(\mathbb{R}_+^2)$,
$\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$; $\mathbb{R}_+^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

Сделаем замену переменной

$$y = \phi(z) := \int_0^z \frac{d\xi}{c(\xi)}, \;\; c(z) := \sqrt{\frac{\lambda(z) + 2\mu(z)}{\rho(z)}},$$

и перейдем от функции $u_1(x, z, t)$ к ее образу Фурье $\tilde{u}_1(\nu, z, t) := F_x[u_1](\nu, z, t)$, причем $supp\ \tilde{u}_1(\nu, z, t) \subset [-\omega, \omega]$, $j = 1, 2$, где ω – фиксированное положительное число.

Будем считать, что $\tilde{h}_1(\nu, t) = F_x[h_1](\nu, t) \in \tilde{\Lambda}(\omega, T)$ тогда и только тогда, когда $\tilde{h}_1(\nu, t) \in C_t^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ и для любого фиксированного $t \in [0, T]$ $supp\ \tilde{h}_1(\nu, t) \subset [-\omega, \omega]$.

Соответственно, $h_1(x, t) \in \Lambda(\omega, T)$ тогда и только тогда, когда $\tilde{h}_1(\nu, t) = F_x[h_1](\nu, t) \in \tilde{\Lambda}(\omega, T)$, $T > 0$ фиксировано.

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2} + \tilde{q}(\nu, y) V_1 - \int_0^t r_0''(t-\tau) V_1(\nu, y, \tau) d\tau$$

$$+ \int_0^t \tilde{h}_1(\nu, t-\tau) \left[\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + q(y) u_0 \right] d\tau - \sqrt{a(y)a(0)} \frac{\partial}{\partial y} Q[\tilde{h}_1](y,t), \tag{1.16}$$

$$V_1 \mid_{t<0} \equiv 0, \tag{1.17}$$

$$\left.\frac{\partial V_1}{\partial y}\right|_{y=+0} = -\int_0^t \tilde{h}_1(\nu, t-\tau) \frac{\partial u_0(\phi^{-1}(y), t)}{\partial y} d\tau + a(0) Q[\tilde{h}_1](0,t), \tag{1.18}$$

$$V_1 \mid_{y=0} = L\left[h_0, \tilde{g}(\nu, t)\right], \tag{1.19}$$

$$V_1(\nu, y, t) := L\left[h_0, \tilde{u}_1(\nu, \phi^{-1}(y), t)\right],$$

$$Q[\tilde{h}_1](y,t) := (3\lambda(\phi^{-1}(y)) + 2\mu(\phi^{-1}(y))) \int_0^t \tilde{h}_1(\nu, t-\tau) R(H(\phi^{-1}(y), \tau)) d\tau.$$

Обратная задача (1.16)–(1.19) эквивалентна системе интегральных уравнений Вольтерра второго рода в области
$D_T = \{(y,t):\ y \le t \le T - y\},\ \ T > 0$ фиксировано.

$$\psi = B\psi, \tag{1.20}$$

$$\psi = \Big[\psi_1(\nu,y,t);\ \ \psi_2(\nu,t);\ \ \psi_3(\nu,y,t);\ \ \psi_4(\nu,t)\Big]:$$

$$= \Big[V_1(\nu,y,t);\ \ \tilde{h}_1'(\nu,t);\ \ \frac{\partial V_1}{\partial t}(\nu,y,t) - \frac{a(0)}{2}(\tilde{h}_1(\nu,t+y) - \tilde{h}_1(\nu,t-y)) - \frac{a(0)}{2}y\tilde{h}_1'(\nu,t-y);\ \ \tilde{h}_1(\nu,t)\Big].$$

Данная система (1.20) является замкнутой линейной системой интегральных уравнений Вольтерра второго рода с непрерывными свободными членами и ядрами относительно неизвестных функций в области D_T при $\nu \in \mathbb{R}$. Идея доказательства существования единственного решения данной системы состоит в применении обобщенного принципа сжатых отображений.

Теорема 1. *Пусть* ω, T *– фиксированные положительные числа. Для существования и единственности решения обратной задачи (1.12)–(1.15)* $h_1(x,t) \in \Lambda(\omega, T)$ *необходимо и достаточно, чтобы* $h_0(t) \in C^3[0,T]$, $\tilde{g}(\nu,t) \in C_t^2(\mathbb{R} \times [0,T])$, $\tilde{g}(\nu,0) = 0$, *и для любого фиксированного* $t \in [0,T]$ *supp* $\tilde{g}(\nu,t) \subset [-\omega,\omega]$.

Теорема 2. *Пусть* $h_1^{(1)}(x,t), h_1^{(2)}(x,t) \in \Lambda(\omega, T)$ *– решения обратной задачи (1.12)–(1.15), отвечающие информациям* $g^{(1)}(x,t)$, $g^{(2)}(x,t)$ *соответственно. Тогда при выполнении условий теоремы 2.1 имеет оценка устойчивости*

$$\int_R \|h_1^{(1)} - h_1^{(2)}\|^2_{C[0,T]}\, dx \le C \int_{-\omega}^{\omega} \|\tilde{g}^{(1)} - \tilde{g}^{(2)}\|^2_{C^2[0,T]}\, d\nu.$$

где C *– некоторая константа, зависящая от величин* ω, T *и значений функций* $\mu(z), \lambda(z), \rho(z), h_0(t)$.

Теперь рассмотрим вопрос о сходимости последовательности решений некоторого семейства задач к искомому решению. Пусть существует решение $h_1(x,t) \in C_t^1([0,\infty); L_2(\mathbb{R}))$, отвечающее информации $\tilde{g}(\nu,t)$. Определим множество функций $\tilde{g}_\omega(\nu,t)$ по правилу:

$$\tilde{g}_\omega(\nu,t) := \theta(\omega - |\nu|)\tilde{g}(\nu,t).$$

Выделим семейство обратных задач: определить функцию $h_1^\omega(x,t) = F_\nu^{-1}[\tilde{h^\omega}(\nu,t)]$ по информации $\tilde{g}_\omega(\nu,t)$.

Теорема 3. *Данное семейство является регуляризованным, то есть:*
1) для каждого $\omega > 0$ обратная задача корректна;
2) если данные таковы, что решение исходной (корректной) задачи существует, то при $\omega \to \infty$ последовательность решений семейства задач с этими данными стремится к решению исходной (некорректной) задачи.

То есть, $\lim\limits_{\omega\to\infty} \sup\limits_{t\in[0,T]} \int\limits_{\mathbb{R}} |h_1^\omega(x,t) - h_1(x,t)|^2 dx = 0.$

Действительно,

$$\lim_{\omega\to\infty} \sup_{t\in[0,T]} \int\limits_{\mathbb{R}} |h_1^\omega(x,t) - h_1(x,t)|^2 dx = \lim_{\omega\to\infty} \sup_{t\in[0,T]} \Big(\int\limits_{-\omega}^{\omega} |\tilde{h}_1^\omega(\nu,t) - \tilde{h}_1(\nu,t)|^2 d\nu$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{-\omega} |\tilde{h}_1(\nu,t)|^2 d\nu + \int\limits_{\omega}^{+\infty} |\tilde{h}_1(\nu,t)|^2 d\nu \Big) =$$

$$= \lim_{\omega\to\infty} \sup_{t\in[0,T]} \left(\int\limits_{-\infty}^{-\omega} |\tilde{h}_1(\nu,t)|^2 d\nu + \int\limits_{\omega}^{+\infty} |\tilde{h}_1(\nu,t)|^2 d\nu \right) = 0.$$

$$u_{tt} - \Delta u + \int_0^t k(t-s)\Delta u(s)ds = 0 \ \text{ in } \Omega \times (0,\infty), \tag{2.1}$$

$$u = 0 \text{ on } \Gamma_1 \times (0,\infty), \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} - \int_0^t k(t-s)\frac{\partial u(s)}{\partial \nu} ds = y_t \text{ on } \Gamma_0 \times (0,\infty), \tag{2.3}$$

$$u_t + p(x)y_t + q(x)y = 0 \text{ on } \Gamma_0 \times (0,\infty), \tag{2.4}$$

$$u(0) = u_0, \quad u_t(0) = u_1 \text{ in } \Omega, \tag{2.5}$$

where Ω is a bounded domain in $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ with boundary $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ of class C^2, Γ_0 and Γ_1 are closed and disjoint, ν is the unit outward normal to Γ, $p, q \in C(\Gamma_0)$ and $p(x), q(x) > 0$ for all $x \in \Gamma_0$, y is normal displacement.

В работе
J.Y. Park, S.H. Park, "Decay rate estimate for wave equations of memory type with acoustic boundary conditions", Nonlinear Anal., 74:3 (2011), 993-998
изучали влияние функции k и получили скорости убывания решений в общем случае, когда k не обязательно убывает экспоненциально.

Впервые понятие акустических граничных условий (общего вида) было введено в работе
J.T. Beale, S.I. Rosencrans, "Acoustic boundary conditions", Bull. Amer. Math. Soc., 80 (1974), 1276-1278:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = y_t \text{ on } \Gamma_0 \times (0, \infty), \tag{2.3'}$$

$$-\rho_0 u_t = m y_{tt} + p(x) y_t + q(x) y \text{ on } \Gamma_0 \times (0, \infty), \tag{2.4'}$$

затем, в работах первого автора (J.T. Beale, 1976, 1977) методами полугрупп изучались условия глобального существования и регулярности решений волнового уравнения

$$u_{tt} - \triangle u = 0$$

с условиями (2.3'), (2.4').
Эти акустические условия весьма интуитивны по своей природе (концертный зал, удовлетворяющим этим условиям, но имеющий некую поглощающую границу).

2. Inverse problem for wave equation of memory type with acoustic boundary conditions. Open problem

Предварительный результат: $x \in \Omega = I = (0, l) \subset \mathbb{R}, t \in [0, T]$.
Дополнительная информация:

$$\int_0^l \varphi(x) u_x dx = f(t), t \in [0, T], \tag{2.6}$$

или

$$\int_0^l \varphi(x) \frac{\partial u}{\partial \nu} dx = f(t), \tag{2.6'}$$

$\varphi(x)$ – заданные функции, представляющие тип устройства для измерения скорости.

Определяется множество

$$Q(\tau, M) = \Big\{ (u_t, k) \in H^2(0, \tau; \mathbb{H}^2(I) \cap \mathbb{H}_0^1(I)) \times L^2(0, \tau) :$$
$$\|\tilde{v}\|_{H^2(0,\tau;\mathbb{H}^2(I) \cap \mathbb{H}_0^1(I))} + \|\tilde{k}\|_{L^2(0,\tau)} \le M \Big\},$$

$M = const > 0$,

$$A : Q(\tau, M) \to Q(\tau, M), \;\; \tau \in (0, T).$$

В работе *Фушан Ли, Шуаи Хи, "Динамические свойства нелинейного уравнения вязкоупругости типа Кирхгофа с граничными условиями акустического управления. I" , Математические заметки, 106:5 (2019), 761-783.* рассматривается нелинейое уравнение типа Кирхгофа с начальными условиями (2.5) и акустическими условиями (2.2), (2.4):

$$u_{tt} - M(\|\nabla u\|_2^2)\triangle u + \int_0^t k(t-s)\triangle u(s)ds + a|u_t|^{m-2}u_t = |u|^{p-2}u \text{ in } \Omega\times(0,\infty), \tag{2.1'}$$

$$M(\|\nabla u\|_2^2)\frac{\partial u}{\partial \nu} - \int_0^t k(t-s)\frac{\partial u(s)}{\partial \nu}ds = y_t \text{ on } \Gamma_0\times(0,\infty), \tag{2.3''}$$

$m \geq 2,\ \ p > 2,\ \ M(s) = a + bs^2,\ \ a, b > 0.$

Показано, что в зависимости от свойств ядра свертки k на бесконечности энергия решения убывает экспоненциально или полиномиально при $t \to +\infty$.
Открытая проблема: определить $u,\ \ k$.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!